



The Philosophy of Mathematics Education

Alexandros Basis

(Greece)

- Αξιότιμε κύριε Πρύτανη, Αξιότιμη κυρία Πρόεδρος του Τμήματος Φιλοσοφίας, Σεβαστοί Καθηγητές, κυρίες και κύριοι.
- *Honorable Cairo University President, Honorable President of the Department of Philosophy, Respectful Professors, ladies and gentlemen.*
- Ευχαριστώ το Πανεπιστήμιο, το οποίο δια της Προέδρου του Τμήματος Φιλοσοφίας, Καθηγήτριας Δρ. HodaElKhouly, μου δίνει την ευκαιρία να απευθυνθώ προς εσάς και να δώσω «μία γεύση Μαθηματικής και Φιλοσοφικής Ελλάδας» στο συνέδριο.
- *Many thanks to the University that gives me the opportunity, throughout the President of the Department of Philosophy, Professor Dr. Hoda El Khouly, to address you and give “a taste of Mathematical and Philosophical Greece” in this congress.*
- Ας μη ξεχνούμε ότι ο Πλάτων απαιτούσε από τους νέους σπουδαστές του να αποδείξουν πρώτα ότι έχουν δυνατότητες να αναπτύξουν μαθηματική σκέψη, προκειμένου μετά να τους διδάξει Φιλοσοφία.
- *We should not forget that Plato was demanding from his new students firstly to prove that they had skills in mathematics in order to teach them afterwards Philosophy.*
- Η Φιλοσοφία που κρύβεται πίσω από την Εκπαίδευση, κυρίως των νέων ατόμων, έχει ένα σκοπό. Το να προσαρμόσει το νέο άτομο στα κοινωνικά πρότυπα της κάθε κοινωνίας.

- *The Philosophy hidden beside Education, especially for new individuals, has a purpose. To adopt the new individual to the social standards of each society.*
- Στις Ανθρωπιστικές Επιστήμες (ιστορία, κοινωνιολογία κλπ) μπορείς να ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΕΙΣ τα νέα άτομα προς συγκεκριμένη κατεύθυνση.
- *In Humanitarian Sciences (history, sociology etc.) you can ORIENT new individuals to a specific direction.*
- Μπορείς να παραλείψεις ιστορικά στοιχεία, ή να αλλοιώσεις στοιχεία, προκειμένου να πετύχεις κάποιο σκοπό (χειραγώγηση).
- *You can miss out historical facts or even change facts in order to achieve a goal (manipulation).*
- Αυτό, όμως, δεν συμβαίνει με την Εκπαίδευση στα Μαθηματικά. Με τα Μαθηματικά αναζητούμε την ΑΙΤΙΑ των πραγμάτων. Και αυτό σημαίνει ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ.
- *This is not happening with the Mathematics Education. In Mathematics we seek the REASON for things to happen. And this is the meaning of DEMOCRACY.*
- Στο Δημοτικό Σχολείο (ηλικίες 6-12 έτη) διδάσκουμε αριθμητική. Δεν δίνουμε ιδιαίτερη σημασία στην ΑΙΤΙΑ.
- *In Primary School (ages 6-12) we teach arithmetic. We don't pay attention to REASONING.*
- Στο Γυμνάσιο (ηλικίες 12-15) ξεκινούμε να αιτιολογούμε τις σκέψεις μας. Αναζητούμε, λοιπόν, την ΑΙΤΙΑ. Αρχίζουμε και διδάσκουμε, λοιπόν, την ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ, μέσω των Μαθηματικών.
- *In Secondary School (ages 12-15) we start reasoning our thoughts. Therefore we seek the REASON. We then start*

teaching DEMOCRACY through Mathematics.

- Στο Λύκειο (ηλικίες 15-18), οι μαθητές διδάσκονται την Μαθηματική Λογική και τις τρεις μοναδικές μεθόδους απόδειξης (ευθεία, αναλυτική, απαγωγή σε άτοπο).
- *In High School (ages 15-18) the students are taught Mathematical Logic and the unique three methods of proving (direct, analytical and porof by contradiction - in Latin: reductio ad absurdum).*
- Ο πρώτος που διατύπωσε τις Αρχές της Λογικής ήταν ο Αριστοτέλης.



- The first who presented the Principles of Logic was Aristotle.
- Οι Στωικοί πρότειναν την Τυπική Λογική, στηριγμένη στις Αρχές της Λογικής του Αριστοτέλη.
- *The Stoics proposed Typical logic, based on the Logic Principles of Aristotle.*

George Boole, 2 November 1815 – 8 December 1864

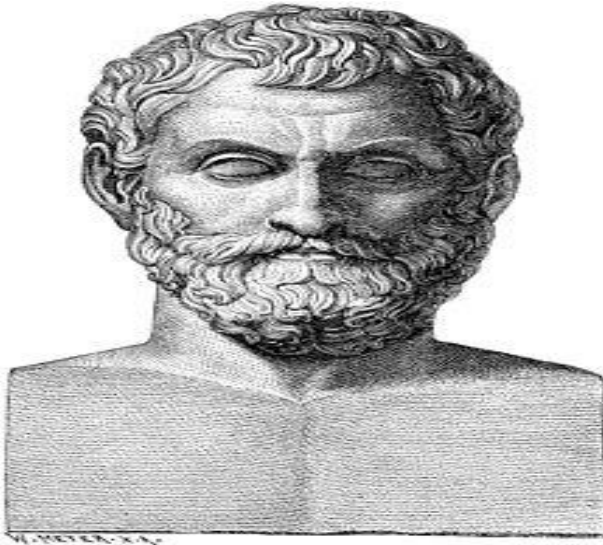
- Η Συνεπαγωγή είναι η πιο σημαντική μαθηματική πράξη στην Άλγεβρα των προτάσεων (Boolean). Διασφαλίζει την ορθή συναγωγή συμπερασμάτων, δηλαδή τον ορθό λόγο. Αποτελεί την

σύνδεση μεταξύ «αιτίου και αιτιατού» ή «υπόθεσης και συμπεράσματος». Αυτό που αποκαλείται ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

- *Conditional (or Conjugation) is the most important mathematical operation in the Boolean Algebra. It assures the correct conclusion, i.e. rationality. It connects the “cause with causality” or “hypothesis and conclusion”. Is what we call PROVE.*
- Διδάσκοντας Μαθηματική Λογική και Αποδεικτικές Μεθόδους ισοδυναμεί με διδασκαλία ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑΣ. Εδώ δεν μπορεί να χωρέσει παραποίηση της αλήθειας.
- Teaching Mathematical Logic and Proving Methods is equivalent to DEMOCRACY. Here doesn't fit any falsification of the truth.
- Σε επίπεδο Λυκείου (ηλικίες 15-18), οι μαθητές διδάσκονται πώς δομήθηκε η Γεωμετρία του Ευκλείδη. Οι φοιτητές των θετικών επιστημών (18+) διδάσκονται πώς δομούνται οι Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.
- *Students in High School (ages 15-18) are taught how was built the Euclidian Geometry. University students (18+) in exact sciences are taught how are built the Non Euclidian Geometries.*

Από τον Θαλή στον Ευκλείδη From Thales to Euclid

- Ο ένας από τους ΕΠΤΑ ΣΟΦΟΥΣ της αρχαιότητας. Επέμενε στο ότι πρέπει να αποδεικνύουμε όλους τους ισχυρισμούς μας.
- One of the SEVEN SAGES (Wise) of Ancient Greece. He was insisting on proving whatever we claim as correct.



Born ~570 B.C. (Samos island- Greece)

Για ένα μικρό διάστημα υπήρξε μαθητής του Θαλή και ακολούθησε την προτροπή του να αποδεικνύονται οι ισχυρισμοί.

For a short time he was a follower of Thales of Miletus and he applied his suggestion to prove all our claims.



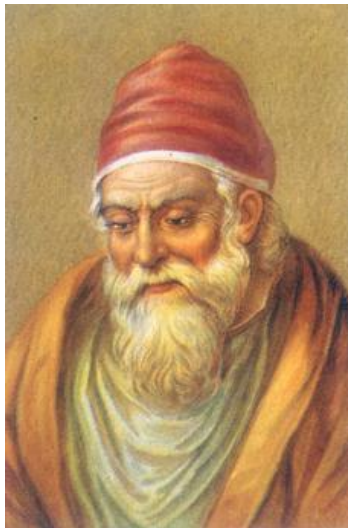
Born ~570 B.C. (Samos island- Greece)

Ο Πυθαγόρας πρότεινε πως οι ΕΠΤΑ ΣΟΦΟΙ της αρχαιότητας θα συνεχίσουν να λέγονται έτσι. Όμως, από το σημείο εκείνο και μετά, οι ασχολούμενοι με την ΣΟΦΙΑ θα λέγονταν Φιλόσοφοι = Φίλοι της Σοφίας, καθώς κανείς άνθρωπος δεν είναι Σοφός.

Pythagoras suggested that the SEVEN SAGES of ancient Greece will keep their title. But henceforth ,the ones involved in studying Wisdom will be called “Lovers of Wisdom”. In Greek “Phili Sophias”=Philosophi.

In Arabic “Lovers of Wisdom” = “Sadiq el Hekma”

Philosophy=Falsafa



Τι έκανε ο Ευκλείδης; What did Euclid do?

- Δημιούργησε την 1^η ΘΕΩΡΙΑ παγκοσμίως!
- He created the 1st THEORY globally!

**Η δομή μιας θεωρίας /
The structure of a theory**

- Ο Ευκλείδης συγκέντρωσε όσα είχαν αποδείξει στην Γεωμετρία οι προηγούμενοι. Προσπάθησε να αποδεικνύει ισχυρισμούς στηριζόμενος σε κάποιον ισχυρισμό που είχε ήδη αποδειχθεί.
- Euclid collected all that were proven by his predecessors. He tried to prove a claim based on another claim already proved.

**Οπισθοβατική πρόβαση /
Going backwards in order to forward**

- Στην προσπάθειά του να αποδείξει το Α, έπρεπε πρώτα να αποδείξει το Β. Για να αποδείξει το Β, έπρεπε να αποδείξει το Γ κ.ο.κ.
- Trying to prove A he had firstly prove another B. To prove B he had to prove a C and so on.

**Οπισθοβατική πρόβαση /
Going backwards in order to forward**

- Αυτό δεν μπορούσε να συνεχίζει επ' άπειρον. Έπρεπε να σταματήσει σε κάποιον ισχυρισμό, ο οποίος ήταν προφανής. Αυτόν τον ισχυρισμό τον ονόμαζε ΑΙΤΗΜΑ (αργότερα Αξίωμα).
- This procedure could not be endless. Should stop somewhere, to an obvious claim. This claim was called SUGGESTION (later on Axiom).

**Αξιώματα – Δόγματα – Αρχικές Προτάσεις
Axioms – Doctrines (Dictum) – Principles**

- Είναι Προτάσεις που τις
Δ Ε Χ Ο Μ Α Σ Τ Ε
- ως αληθείς, χωρίς απόδειξη.
- These are Clauses (claims) being
A C C E P T E D
as true without any prove.

Αξιώματα και Λογική Axioms and Logic

- Ποτέ δεν εμπλέκουμε την Λογική στα Αξιώματα.
ΠΟΤΕ!!! ΠΟΤΕ!!!ΠΟΤΕ!!!
- We never interfere Logic into Axioms.
NEVER!!!NEVER!!!NEVER!!!

Η δομή μιας θεωρίας The structure of a theory

- Θέτουμε πρώτα τα Αξιώματα (για θρησκείες τα Δόγματα).
- We first set the Axioms (for a religion the Doctrines).
- Θέτουμε πρώτα τα Αξιώματα (για θρησκείες τα Δόγματα).
- Ακολουθώς, κάνουμε χρήση του εργαλείου που λέγεται Λογική και εξάγουμε συμπεράσματα, έχοντας ως αληθείς αρχικές προτάσεις τα ήδη τεθέντα Αξιώματα.
- We first set the Axioms (for a religion the Doctrines).
- We then use the tool called Logic to make conclusions considering as true initial clauses the Axioms we sat up.

Η δομή μιας θεωρίας The structure of a theory

- Θέτουμε πρώτα τα Αξιώματα (για θρησκείες τα Δόγματα).
- Ακολουθώς, κάνουμε χρήση του εργαλείου που λέγεται Λογική και εξάγουμε συμπεράσματα, έχοντας ως αληθείς αρχικές προτάσεις τα ήδη τεθέντα Αξιώματα. Αν τα συμπεράσματα αντικρούουν κάποια από τα Αξιώματα, τότε χρειάζεται επανατοποθέτηση των Αξιωμάτων.
- *We first set the Axioms (for a religion the Doctrines).*
- We then use the tool called Logic to make conclusions

considering as true initial clauses the Axioms we sat up. If the conclusions contradict to some of the Axioms, then we need to set up again the Axioms.

- Γιατί ως άνθρωποι συμφωνούμε ή διαφωνούμε;
Why humans agree or disagree?
- Το ότι διαφωνούμε οφείλεται στο ότι έχουμε διαφορετικά αξιώματα, διαφορετικά σημεία εκκίνησης. Δεν οφείλεται σε διαφορετική λογική. Η Λογική είναι μία και αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο ελέγχου, χωρίς να εμπλέκεται στα ίδια τα Αξιώματα. Διαφωνούμε σε αυτά που δεν αποδεικνύονται!
- The fact that we disagree is because we have different axioms, different starting points. It is not due to a different logic. Logic is one and is an important tool of control, without being involved in the Axioms themselves. We disagree on those that are not proved!

Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες / Non Euclidian Geometries

- Ένα από τα Αξιώματα του Ευκλείδη (το 5ο σε σειρά) δεν ήταν τόσο απλό στην κατανόηση και την αποδοχή του. Πολλοί θεώρησαν ότι ο Ευκλείδης δεν μπορούσε την εποχή εκείνη να το αποδείξει και ότι μία ημέρα θα αποδεικνυόταν από τους επόμενους.
- One of the Axioms sat up by Euclid (the 5th in sequence) was not so easy to understand and accept. Several mathematicians thought that Euclid could not prove it at that time and that one day someone could prove it.

Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες / Non Euclidian Geometries

- Μετά από 2.200 χρόνια το 5ο αυτό Αξίωμα δεν είχε ακόμη αποδειχθεί! Ένας Ρώσος μαθηματικός του 19ου αιώνα έκανε μία πρωτότυπη υπόθεση!
- After 2,200 years and the 5th Axiom was not proved! A Russian mathematician of the 19th century made a very genius thought!

Nikolai Lobachevsky

Russia, 1 Dec 1792 – 24 Feb 1856



- Lobachevsky έκανε την υπόθεση ότι ίσως ο Ευκλείδης είχε δίκιο που έβαλε το 5ο Αξίωμα. Αποφάσισε να δημιουργήσει μία θεωρία, αρνούμενος και αλλάζοντας μόνο το 5ο Αξίωμα και αφήνοντας όλα τα άλλα όπως ήταν. Δημιουργήθηκε, έτσι, η πρώτη ΜΗ Ευκλείδεια Γεωμετρία!

- Lobachevsky made a hypothesis that maybe Euclid was right setting up the 5th Axiom. He decided to create a theory denying and changing only the 5th Axiom, leaving all the rest Axioms as they were. The result was the formation of the first NON Euclidian Geometry!

Georg Friedrich Bernhard Riemann

German, 17 Sep 1826 – 20 Jul 1866

Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες /

Non Euclidian Geometries

- Ο Riemann αρνήθηκε το 5ο Αξίωμα του Ευκλείδη, αλλά και του Lobachevsky! Έτσι δημιούργησε μία νέα ΜΗ Ευκλείδεια Γεωμετρία!
- Riemann denied the 5th Axiom of Euclid but also the 5th Axiom of Lobachevsky! So, he created a new NON Euclidian Geometry!

Ποιου η Γεωμετρία είναι σωστή; /

Who's Geometry is correct?

- ΟΛΕΣ! Ο φοιτητής των μαθηματικών και φυσικών επιστημών διδάσκεται ότι όλες είναι σωστές και ότι, ανάλογα με το τι θέλεις να μελετήσεις, χρησιμοποιείς και την αντίστοιχη Γεωμετρία.
- ALL OF THEM! The university student of math or physics learns that all of them are correct and that, depending on what you want to study, you use the relevant Geometry.
- Αν θέλω να μελετήσω τα σχήματα και τον κόσμο γύρω μου, θα πρέπει να χρησιμοποιήσω την Γεωμετρία του Ευκλείδη. Για την μελέτη του Σύμπαντος, θα χρειασθώ τον Riemann.
- If I want to study shapes and the world near by me, then I have to use the Euclidian Geometry. If I want to study the Universe, then I will use Riemann.

Ανοχή και αντι-δογματική αντίληψη
Tolerance and anti-dogmatic sense

- Ο φοιτητής των μαθηματικών και φυσικών επιστημών διδάσκεται την ανοχή στην διαφορετικότητα και αποκτά αυξημένη αίσθηση αντιδογματικής αντίληψης.
- The university student of math or physics learns tolerance to different ideas and improves anti-dogmatic (anti-doctrine) sense.